Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2021

Lineare Algebra II
Blatt 4
Abgabe: 24.05.2021, 10 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte).
Auf dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V = \mathbb{Q}[T]_{\leq 3}$ aller Polynome über $\mathbb{Q}$ vom Grad höchstens 3 betrachte die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} F: \ V &\to V \\ P &\mapsto \tfrac{\partial P}{\partial T} + \big(P(1) - P(-1)\big) \end{aligned}$$

(a) Bestimme die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Basis $B = \{1, T, T^2, T^3\}$.

(b) Zeige, dass F nilpotent ist. Bestimme seinen Nilpotenzindex.

(c) Berechne den Unterraum $\mathrm{Ker}(F)$. Ist F diagonalisierbar?

(d) Finde eine adaptierte Basis von V bezüglich F. Wie viele Blöcke maximaler Größe besitzt die entsprechende Darstellungsmatrix?

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Seien $F : V \to V$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V und U ein F-invarianter Unterraum von V.

Zeige, dass F genau dann nilpotent ist, wenn sowohl die Einschränkung $F_{\restriction U}$ als auch der von F induzierte Endomorphismus $\widetilde{F} : V/U \to V/U$ nilpotent sind.

Muss der Nilpotenzindex von F gleich dem Nilpotenzindex der Einschränkung $F_{\restriction U}$ sein?

Aufgabe 3 (8 Punkte). Sei A folgende (5×5)-Matrix über einem beliebigen Körper.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne die Eigenwerte von A und deren geometrische Vielfachheiten.

(b) Bestimme die Haupträume und gib eine Jordansche Normalform für A an.

(c) Bestimme das Minimalpolynom von A.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe in ILIAS als eine einzige PDF-Datei einreichen.